

Definicja matematyczna, mapowanie i wykrywanie (anty)kruchości

By kama3 kama3

paź 3, 2025

Proponujemy wykrywanie kruchości, odporności i antykruchości przy użyciu pojedynczej, „szybkiej i oszczędnej”, niezależnej od modelu i prawdopodobieństwa heurystyki, która wykrywa również narażenie na błąd modelu.

[Read more](#)

Czym jest kruchość?

Pojęcia kruchości i antykruchości zostały wprowadzone w pracy Taleba (2011, 2012). Krótko mówiąc, kruchość jest związana ze sposobem, w jaki system cierpi z powodu zmienności swojego otoczenia poza pewnym ustalonym progiem (gdy progiem jest K , nazywa się to k -kruchością), natomiast antykruchość odnosi się do sytuacji, w której system korzysta z tej zmienności — podobnie jak „vega” opcji lub nieliniowa wypłata, czyli jego wrażliwość na zmienność lub inną podobną miarę skali rozkładu.

Funkcja przejścia: Nieliniowa ekspozycja na określone źródło losowości odwzorowuje wrażliwość na ogon vegi (stąd kruchość). Dowodzimy, że dziedziczona kruchość, wklęsłość ekspozycji po lewej stronie rozkładu i tworzymy H , funkcję przejścia dającą dokładne odwzorowanie wrażliwości ogona vegi na drugą pochodną funkcji. Funkcja przejścia pozwoli nam zbadać części rozkładu i wygenerować heurystykę wykrywania kruchości, obejmującą zarówno kruchość fizyczną, jak i błąd modelu.

HISTYKA DETEKCJI Wreszcie, dzięki funkcji przejścia, niniejszy artykuł proponuje heurystykę ryzyka, która „działa” w wykrywaniu kruchości, nawet jeśli użyjemy niewłaściwego modelu/metody wyceny/rozkładu prawdopodobieństwa. Główną ideą jest to, że niewłaściwa linijka nie zmierzy wzrostu dziecka, ale z pewnością może nam powiedzieć, czy rośnie. Ponieważ ryzyko w ogonach jest odwzorowywane na nieliniowości (wklęsłość ekspozycji), efekty drugiego rzędu ujawniają kruchość, szczególnie w ogonach, gdzie jest odwzorowywane na duże ekspozycje ogonów, co ujawnia analiza zaburzeń. Mówiąc ogólnie, każda funkcja nieliniowa będzie generować pewien rodzaj dodatniej lub ujemnej ekspozycji na zmienność dla niektórych części rozkładu.

Zatem, poza kruchością fizyczną, to samo podejście mierzy kruchość modelu, w oparciu o różnicę między estymacją punktową a wartością stochastyczną (tj. rozkładem pełnym). Zwiększenie zmienności (np. wariancji) wartości estymowanej (ale nie średniej) może prowadzić do jednostronnego efektu na model — tak jak wzrost zmienności powoduje pęknięcie porcelanowych filiżanek.

W związku z tym, wrażliwość na zmienność takiej wartości, „vega” modelu względem tej wartości nie różni się od vegi innych wypłat. Na przykład, niewłaściwe wykorzystanie rozkładów cienkoogonowych (np. gaussowskich) pojawia się natychmiast poprzez zaburzenie odchylenia standardowego, które nie jest już używane jako estymacja punktowa, lecz jako rozkład z własną wariancją. Na przykład, można pokazać, jak rozkłady prawdopodobieństwa o grubych ogonach (np. o ogonach potęgowych) można wyrazić za pomocą prostego zagnieżdżonego zaburzenia i mieszania zaburzeń gaussowskich. Taka reprezentacja wskazuje na kruchość błędnego modelu prawdopodobieństwa i jego konsekwencje w postaci niedoszacowania ryzyka, testów warunków skrajnych i podobnych kwestii. Antykruchość: Nie jest to do końca lustrzane odbicie kruchości, ponieważ oznacza dodatnią vegę powyżej pewnego progu w dodatnim ogonie rozkładu i brak kruchości w lewym ogonie, co prowadzi do rozkładu przechylonego w prawo.

MATEMATYCZNY WYRAZ ŁAGODNOŚCI

W istocie, kruchość to wrażliwość danej miary ryzyka na błąd w oszacowaniu (potencjalnie jednostronnego) parametru odchylenia rozkładu, zwłaszcza ze względu na fakt, że miara ryzyka obejmuje części rozkładu – ogony – oddalone od części wykorzystanej do estymacji. Miara ryzyka przyjmuje zatem pewne reguły ekstrapolacji, które mają konsekwencje pierwszego rzędu.

Definicja kruchości: Przypadek wewnętrzny. Lokalna kruchość zmiennej losowej X_λ zależna od parametru λ , przy poziomie stresu K i poziomie półodchylenia $s - (\lambda)$ z pdf f_λ jest jej K -lewostronną pół-vega wrażliwością $V(X, f_\lambda, K, s - (\lambda))$. Kruchość X_λ w skończonych różnicach przy poziomie stresu K i poziomie półodchylenia $s - (\lambda) \pm \Delta s$ z pdf f_λ jest jej K -lewostronną pół-vega wrażliwością $V(X, f_\lambda, K, s - (\lambda), \Delta s)$. W tej definicji kruchość opiera się na niewypowiedzianych założeniach przyjętych podczas ekstrapolacji rozkładu X_λ z obszarów użytych do oszacowania pół-absolutnego odchylenia $s - (\lambda)$, wokół Ω , do obszarów wokół K , od których zależy miara ryzyka ξ .

Odziedziczona kruchość Y względem X przy poziomie stresu $L = \varphi(K)$ i poziomie półodchylenia lewego $s - (\lambda) X$ jest pochodną cząstkową:

Implikacje nieliniowej zmiany zmiennej na kruchość wewnętrzną

TWIERDZENIE 1 (TWIERDZENIE O TRANSFERZE WRAŻLIWOŚCI)

H można postrzegać jako funkcję transferu, wyrażoną jako różnica między dwoma ilorazami. Dla danego poziomu x zmiennej losowej po lewej stronie Ω , drugi iloraz jest ilorazem vegi opcji put zrealizowanej przy x , znormalizowanym przez iloraz vegi opcji put zrealizowanej „na poziomie ceny” (tj. zrealizowanej przy Ω), podczas gdy pierwszy iloraz jest taki sam, ale opcje put zrealizowane przy x i Ω to „europejskie opcje down-and-in” z barierą aktywacji na poziomie K .

TWIERDZENIE O ZAOSTRZENIU WRAŻLIWOŚCI

Dryf kruchości Kruchość jest definiowana jako wrażliwość – tj. pierwsza pochodna cząstkowa – estymatora ogona ξ względem lewego półodchylenia $s -$. Zdefiniujmy teraz dryf kruchości:

Definicje odporności i antykruchości

Antykruchość nie jest prostym przeciwieństwem kruchości, jak widzieliśmy w Tabeli 1. Pomiar antykruchości, z jednej strony, polega na odwróceniu kruchości po prawej stronie, z drugiej strony wymaga kontroli odporności rozkładu prawdopodobieństwa po lewej stronie. Z tego punktu widzenia, w przeciwieństwie do kruchości, antykruchości nie da się streścić jednym wykresem, lecz wymaga co najmniej dwóch. Gdy zmienna losowa zależy od innego źródła losowości: $Y_\lambda = \varphi(X_\lambda)$, zbadamy antykruchość Y_λ w odniesieniu do X_λ i do właściwości funkcji φ .

W praktyce wyznaczenie istotnej górnej granicy b dla kruchości jest szczególnie ważne: należy być w stanie uzyskać rzeczywiste oszacowania wpływu błędu na oszacowanie lewego półodchylenia. Jednakże, mając do czynienia z pewnymi klasami modeli, takimi jak rozkłady Gaussa, wykładnicze rozkłady stabilne, możemy być zmuszeni do rozważenia asymptotycznych definicji odporności, związanych z pewnymi klasami.

Drugi warunek antykruchości dotyczy prawej strony rozkładu. Zdefiniujmy prawe półodchylenie X :

Kruchość jest specyficzna dla K . Interesują nas tylko zdarzenia niepożądane poniżej pewnego, z góry określonego poziomu, punktu krytycznego. Ekspozycje A mogą być bardziej kruche niż ekspozycja B dla $K = 0$ i znacznie mniej kruche, jeśli K jest, powiedzmy, 4 odchylenia średnie poniżej 0. Może być konieczne użycie skończonych Δs , aby uniknąć sytuacji, jak zobaczymy w przypadku vega-neutralności w połączeniu z krótkim lewym ogonem.

Skutek użycia niewłaściwego rozkładu f : Porównując $V(X, f, K, s - , \Delta s)$ z rozkładem alternatywnym $V(X, f^*, K, s^*, \Delta s)$, gdzie f^* jest rozkładem „prawdziwym”, miara kruchości dostarcza akceptowalnego wskaźnika wrażliwości danego wyniku – takiego jak miara ryzyka – na błąd modelu, pod warunkiem, że nie występują żadne „efekty paradoksalne” zakłócające sytuację. Takie „efekty paradoksalne” to na przykład zmiana kierunku, w którym pewne percentyle rozkładu reagują na parametry modelu, takie jak $s -$. Rzeczywiście możliwe jest, że nieliniowość pojawia się między rdzeniem rozkładu a ogonami, tak że gdy $s -$ wzrasta, lewy ogon zaczyna się pogrubiać – dając dużą zmierzoną kruchość – a następnie cofa się – co oznacza, że rzeczywista kruchość jest niższa niż zmierzona. Może się również zdarzyć odwrotna sytuacja, co oznacza niebezpieczne niedoszacowanie kruchości. Te nieliniowe efekty mogą pozostać pod kontrolą, pod warunkiem, że przyjmie się pewne założenia regularności dotyczące rzeczywistego rozkładu, jak również rozkładu zmierzonego. Na przykład, efektów paradoksalnych zazwyczaj unika się w przypadku co najmniej jednej z następujących trzech hipotez: a. Klasa rozkładów, w których wybierane są zarówno f , jak i f^* , jest monomodalna, z monotoniczną zależnością percentyli względem siebie. b. Różnica między percentylami f i f^* ma stały znak (tj. f^* jest zawsze szersze lub zawsze węższe niż f w dowolnym danym percentylu). c. Dla dowolnego poziomu strajku K (w zakresie, który ma znaczenie), miara kruchości V monotonicznie zależy od $s -$ od całego zakresu, w którym można oczekiwać prawdziwej wartości s^* . Dzieje się tak w szczególności, gdy pochodne cząstkowe $\partial V / \partial s_k$ mają ten sam znak w mierzonym $s -$ aż do pewnego rzędu n , przy którym pochodna cząstkowa ma ten sam stały znak w całym zakresie, w którym można oczekiwać prawdziwej wartości s^* . Ten warunek można zastąpić założeniem o różnicach skończonych aproksymujących pochodne cząstkowe wyższego rzędu, gdzie n jest wystarczająco duże, aby przedział $[s - \pm n\Delta s]$ obejmował zakres możliwych wartości s^* . Rzeczywiście, w tym przypadku estymacja kruchości różnic skończonych wykorzystuje oceny ξ w punktach obejmujących ten przedział.

PRZYPADEK 1 – ZASTOSOWANIE DO DEFICYTÓW

BŁĄD MODELU I PÓŁOBCIĄŻENIE JAKO NIELINIOWOŚĆ WYNIKAJĄCA Z NIEPOMINIONEJ TOCHASTYCZNOŚCI ZMIENNYCH Błąd modelu często wynika z braku istnienia zmiennej losowej, która jest istotna dla określenia wyniku (np. w wycenie opcji bez ryzyka kredytowego). Nie możemy go wykryć za pomocą heurystyki przedstawionej w tym artykule, ale jak wspomniano wcześniej, błąd idzie w przeciwnym kierunku, ponieważ modele mają tendencję do bycia bogatszymi, a nie uboższymi, z powodu nadmiernego dopasowania. Możemy jednak wykryć błąd modelu wynikający z braku stochastyczności zmiennej lub niedoszacowania jej stochastycznego charakteru (np. w wycenie opcji z niestochastycznymi stopami procentowymi lub ignorowania faktu, że „zmiennosc” σ może się zmieniać). Efekty braków: Badanie błędu modelu nie polega na kwestionowaniu jego precyzji, czy też odwzorowuje on rzeczywistość; Chodzi o ustalenie efektu pierwszego i drugiego rzędu wynikającego z braku zmiennej, upewniając się, że błędy modelu nie mają brakujących składników wyższego rzędu, które powodują poważne, nieoczekiwane (i niezauważalne) odchylenia w jednym kierunku z powodu wypukłości lub wklęsłości, innymi słowy, czy błąd modelu powoduje zmianę z.

Posiadanie prawidłowego modelu (co jest bardzo hojnym założeniem), ale brak pewności co do parametrów, nieuchronnie doprowadzi do wzrostu błędu modelu w przypadku obecności wypukłości i nieliniowości.

Przykład 2 (Wykrywanie ryzyka skrajnego w systemie przeoptymalizowanym, ωB). Zwiększ ruch na lotnisku o 10%, zmniejsz o 10%, oblicz średni oczekiwany czas podróży z każdego z nich i sprawdź asymetrię pod kątem nieliniowości. Jeśli asymetria jest znacząca, zadeklaruj system jako przeoptymalizowany. (Zarówno ωA , jak i ωB pokazano w ten sposób. Przykład 3 (Wykrywanie błędów w ramach probabilistyki, ωB). Zmień parametr w górę o odchylenie średnie, oblicz całą lewą poniżej K ; obniż ją o odchylenie średnie; oblicz i porównaj. Jeśli występuje asymetria, sytuacja jest niepewna, a błąd modelu jest duży w zakresie asymetrii. Ta sama procedura ujawnia zarówno kruchość, jak i konsekwencje błędu modelu (potencjalne szkody wynikające z błędnego rozkładu prawdopodobieństwa, cienkoogonowego, a nie gruboogonowego). Dla traderów (patrz dyskusje Gigerenzer, Gigerenzer i Brighton (2009), Gigerenzer i Goldstein (1996)) zabawa efektami drugiego rzędu uproszczonych narzędzi może być skuteczniejsza niż bardziej skomplikowane i trudniejsze do kalibracji metody. Zobacz także intuicję szybkiego i oszczędnego w Derman i Wilmott (2009), Haug i Taleb (2011).

Heurystyka :Taleb, Canetti i in. (2012) opracowali heurystykę równoległą z niniejszym artykułem, mającą zastosowanie do testów warunków skrajnych lub, ogólniej, wycen. 1. Pierwszy krok (pierwszego rzędu). Weź ψ wycenę. Zmierz wrażliwość na wszystkie parametry p , określając V w skończonych zakresach Δp . Jeśli jest istotnie istotne, sprawdź, czy stochastyczność parametru jest uwzględniana w ocenie ryzyka. Jeśli nie, zatrzymaj się i ogłoś ryzyko jako rażąco błędnie zmierzone (nie ma potrzeby dalszej oceny ryzyka). (Należy zauważyć, że przykład Ricardo z obrusem całkowicie nie zdaje pierwszego kroku po stochastyzacji). 2. Drugi krok (drugiego rzędu). Dla wszystkich parametrów p oblicz drugi rząd, gdzie 2. Trzeci krok. Zwróć uwagę na parametry, dla których H jest istotnie $>$ lub < 1 . Właściwości heurystyki: i. Kruchość: V' jest dokładniejszym wskaźnikiem kruchości niż V w Δp , gdy p jest stochastyczne lub narażone na błędy estymacji ze średnim odchyleniem Δp . ii- Błąd modelu: Model $M(p)$ ze stałym parametrem p niedoszacowuje kruchości wypłaty z x przy zaburzeniu Δp , jeśli $H > 1$, iii- jeśli $H = 1$, ekspozycja na x jest solidna przy Δp , a błąd modelu przy p jest nieistotny. iv- jeśli H pozostaje dla coraz większych Δp , to heurystyka jest szeroka (brak pseudowypukłości). Możemy zastosować tę metodę do V w równaniu 1, ponieważ staje się ona zaburzeniem zaburzenia (w Dynamic Hedging „ $vvol$ ” lub „zmienność zmienności” lub w późniejszym żargonie $vvol$), gdzie K jest progiem kruchości, x jest zmienną losową opisującą wyniki, Δp jest zaburzeniem zbioru, a f miarą prawdopodobieństwa używaną do obliczenia ζ . Należy zauważyć, że dla K ustawionego na , heurystyka staje się prostym wykryciem błędu modelu wynikającego z efektu nierówności Jensena podczas stochastykizacji atermu. Uważa się, że miara ωA jest deterministyczna. Heurystyka ma zdolność „wypełnienia ogona”, rozszerzając się dalej w dół rozkładu prawdopodobieństwa wraz ze wzrostem Δp . Najlepiej jest zaburzyć wykładnik ogona równania potęgowego. Uwagi: a. Proste heurystyki mają odporność (pomimo możliwego błędu) w porównaniu z miarami zoptymalizowanymi i skalibrowanymi. Jak na ironię, to właśnie z powodu mnożenia błędów wypukłości i potencjalnych błędów wynikających z ich pominięcia, skalibrowane modele działające w próbie dają gorsze wyniki niż heurystyki poza próbą. b. Pozwala na wykrycie efektu użycia niewłaściwego rozkładu prawdopodobieństwa bez zmiany rozkładu prawdopodobieństwa (wyłącznie z powodu zależności od parametrów). c. Przewyższa wszystkie inne powszechnie stosowane miary ryzyka, takie jak CVaR, „oczekiwany niedobór”, testy warunków skrajnych.

Nowa heurystyczna miara kruchości i ryzyka skrajnego: zastosowanie w testach warunków skrajnych